$$=\left[-\frac{1}{n}t^2e^{-nt}\right]_0^x+\frac{2}{n}\int_0^x te^{-nt}dt \quad \left(\begin{array}{lll} u_2'(t)=e^{-nt} & \rightsquigarrow & u_2(t)=-\frac{1}{n}e^{-nt} \\ v_2(t)=t & \rightsquigarrow & v_2'(t)=1 \end{array}\right)$$

$$=-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}+\frac{2}{n}\left[\left[-\frac{1}{n}te^{-nt}\right]_0^x+\frac{1}{n}\int_0^x e^{-nt}dt\right]$$

$$=-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}-\frac{2}{n^2}xe^{-nx}+\frac{2}{n^2}\left[-\frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^x$$

$$=-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}-\frac{2}{n^2}xe^{-nx}-\frac{2}{n^3}e^{-nx}+\frac{2}{n^3}.$$

d- $\lim\limits_{x\to+\infty} I_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{n}x^2e^{-nx}-\frac{2}{n^2}xe^{-nx}-\frac{2}{n^3}e^{-nx}+\frac{2}{n^3}\right]$

(On pose $X=-nx$; quand $x\to+\infty; X\to-\infty$.)

$$=\lim_{X\to-\infty}\left(-\frac{1}{n^3}X^2e^X+\frac{2}{n^3}Xe^X-\frac{2}{n^3}e^X\right)+\frac{2}{n^3}$$

$$=-\frac{1}{n^3}\lim_{x\to-\infty}\left(2\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2+\frac{2}{n^3}=\frac{2}{n^3} \qquad \text{car } \lim_{y\to-\infty} ye^y=0.$$

2)a- $\forall t\in IR_+^*;\ \frac{1}{e^t-1}=e^{-t}+e^{-2t}+\ldots+e^{-nt}+\frac{e^{-nt}}{e^t-1}$

donc $\forall t\in IR_+;\ \frac{t^2}{e^t-1}=t^2e^{-t}+t^2e^{-2t}+\ldots+t^2e^{-nt}+\frac{t^2e^{-nt}}{e^t-1}$

D'où $\forall x\in IR^+$,

$$\int_0^x\frac{t^2}{e^t-1}dt=\int_0^x t^2e^{-t}dt+\int_0^x t^2e^{-2t}dt+\ldots+\int_0^x t^2e^{-nt}dt+\int_0^x\frac{t^2e^{-nt}}{e^t-1}dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x f(t)dt=I_1(x)+I_2(x)+\ldots+I_n(x)+\int_0^x f(t)e^{-nt}dt$$

$$\Leftrightarrow F(x)-\int_0^x f(t)e^{-nt}dt=\sum_{k=1}^n I_k(x).$$

- $H_n(x)=\int_0^x f(t)e^{-nt}dt=F(x)-\sum_{k=1}^n I_k(x).$

Or $F(x)$ possède une limite en $+\infty$ et chaque I_k possède une limite quand $x\to+\infty$. Alors $H_n(x)$ possède une limite en $+\infty$

$$H_n(x)=F(x)-\sum_{k=1}^n I_k(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} H_n(x)=\lim_{x\to+\infty} F(x)-\lim_{x\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^n I_k(x)\right]$$

$$\Leftrightarrow \ell_n=L-\sum_{k=1}^n\left(\lim_{x\to+\infty} I_k(x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \ell_n=L-\sum_{k=1}^n\frac{2}{k^3} \Leftrightarrow L-\ell_n=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)$$

b- $\forall x\in IR^+; 0\le \underbrace{\int_0^x f(t)e^{-nt}dt}_{H_n(x)}\le\frac{a(2-a)}{n}$. (d'aprés **B-1)b-**)

de plus $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a(2-a)}{n}=0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} H_n(x)=0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\ell_n=0.$$

c- $L-\ell_n=2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)=2u_n \Leftrightarrow u_n=\frac{1}{2}(L-\ell_n)$

Or (ℓ_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}\left(L-\lim\limits_{n\to+\infty}\ell_n\right) \Leftrightarrow \underline{L'=\frac{1}{2}L.}$